Công thức Stokes (tiếp theo) và Công thức Gauss–Ostrogradsky

Lê Đức Hưng

Bộ Môn Giải Tích, Khoa Toán-Tin Học, Trường ĐH KHTN, ĐHQG-HCM

Ngày 08 tháng 01 năm 2026

Nhắc lại: Công thức Stokes

Giả sử S là vết của một mặt, mà miền xác định là một tập đóng bị chặn có diện tích của mặt phẳng có biên là vết của một đường chính quy từng khúc trên đó công thức Green áp dụng được.

Giả sử mặt này là đơn, chính quy, trơn cấp hai trên tập mở chứa miền xác định.

Giả sử S và ∂S có *định hướng tương thích*. Cho trường F trơn trên một tập mở chứa S. Khi đó,

$$\int_{\partial S} F \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \iint_S \operatorname{curl} F \cdot \mathrm{d}\vec{S},$$

trong đó $\operatorname{curl} F = \nabla \times F$.

Ví dụ

Cho C là một đường đi đơn, kín, chính quy trong mặt phẳng $x+y+z=1$. Chứng tỏ tích phân

$$\int_C z\,\mathrm{d}x - 2x\,\mathrm{d}y + 3y\,\mathrm{d}z$$

chỉ phụ thuộc vào diện tích của miền bên trong C.

Với trường $F=(z,-2x,3y)$, ta tính

$$\operatorname{curl} F = \det\begin{pmatrix} \vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & -2x & 3y \end{pmatrix} = (3,1,-2).$$

Gọi D là miền bên trong C và giả sử C có hướng tương thích với D.

Vì pháp vectơ của mặt phẳng $x + y + z = 1$ là $(1, 1, 1)$, cùng định hướng với quy định trên, nên công thức Stokes cho:

$$\begin{aligned}\int_C z\,\mathrm{d}x - 2x\,\mathrm{d}y + 3y\,\mathrm{d}z &= \iint_D \operatorname{curl} F \cdot \,\mathrm{d}\vec{S} \\ &= \iint_D (3, 1, -2) \cdot (1, 1, 1)\,\mathrm{d}A \\ &= \iint_D 2\,\mathrm{d}A = 2|D|.\end{aligned}$$

Mặt khác, nếu C được định hướng trái với hướng tương thích của D thì

$$\int_C z\,\mathrm{d}x - 2x\,\mathrm{d}y + 3y\,\mathrm{d}z = -2|D|.$$

Do đó, tích phân đã cho chỉ phụ thuộc vào diện tích của miền bên trong đường C. □

Trước hết, ta có mệnh đều sau:

Mệnh đề (curl grad = 0)

Nếu f là hàm thực có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trên một tập mở thì trên đó $\operatorname{curl}(\nabla f) = 0$.

Dùng ký hiệu thì ta viết $\nabla \times (\nabla f) = 0$.

Chứng minh: Tương tự như trường hợp hai chiều, tính trực tiếp để được:

$$\operatorname{curl}(\nabla f) = \det \begin{pmatrix} \vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix} = (f_{zy} - f_{yz}, f_{xz} - f_{zx}, f_{yx} - f_{xy}) = 0.$$

Đây là điều cần chứng minh. 

Điều kiện cần để trường ba chiều là bảo toàn

Nếu F là trường trơn bảo toàn trên một tập mở thì $\operatorname{curl} F = 0$ *trên đó.*

Nói cách khác, nếu $F = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ bảo toàn thì điều kiện sau phải được thỏa:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Ta có thể dùng kết quả này để chứng tỏ một trường là không bảo toàn bằng cách chỉ ra rằng curl của nó khác 0.

Ví dụ

Trường $F(x,y,z)=(y,x,y)$ *có bảo toàn trên* $\mathbb{R}^3$ *hay không?*

Trường F trơn cấp một trên $\mathbb{R}^3$. Ta tính

$$\operatorname{curl} F = \det\begin{pmatrix} \vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x & y \end{pmatrix} = (1,0,0) \neq 0,$$

nên F không là trường bảo toàn. 

Điều kiện đủ để trường ba chiều là bảo toàn

Mệnh đề (12.5, Bổ đề Poincaré)

Nếu trường F trơn trên một miền mở hình sao (hay miền đơn liên) trong $\mathbb{R}^3$ và $\operatorname{curl} F = 0$ thì F là bảo toàn trên đó.

Chứng minh của Bổ đề này tương tự như trong mặt phẳng; ta sử dụng Định lý Stokes thay vì Định lý Green.

Ví dụ

Trường sau có bảo toàn không? Nếu có, tìm hàm thế.

$$F(x,y,z) = y^2z^3\vec{\mathrm{i}} + 2xyz^3\vec{\mathrm{j}} + 3xy^2z^2\vec{\mathrm{k}}.$$

Trường F xác định trong $\mathbb{R}^3$. Vì

$$\operatorname{curl} F = \det \begin{pmatrix} \vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 \end{pmatrix} = (0,0,0)$$

nên F là trường bảo toàn theo Bổ đề Poincaré.

Ta cần tìm hàm thế $f(x, y, z)$ sao cho $\nabla f = F$, nghĩa là:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y^2 z^3, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xyz^3, \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 3xy^2 z^2. \end{cases}$$

Lấy nguyên hàm theo x của phương trình đầu tiên, ta có:

$$f(x, y, z) = \int y^2 z^3 \, \mathrm{d}x = xy^2 z^3 + C(y, z).$$

Thay vào phương trình thứ hai để được:

$$2xyz^3 + C_y(y, z) = 2xyz^3 \Leftrightarrow C_y(y, z) = 0,$$

nên $C(y, z) = D(z)$.

Vì vậy, $f(x,y,z) = xy^2z^3 + D(z)$. Thay vào phương trình thứ ba để được:

$$3xy^2z^2 + D'(z) = 3xy^2z^2 \Leftrightarrow D'(z) = 0,$$

nên $D(z) = K$, với K là hằng số bất kỳ. Do đó, hàm thế là:

$$f(x,y,z) = xy^2z^3 + K.$$



Chương: Công thức Gauss–Ostrogradsky

Định nghĩa hàm phân tán (divergence)

Cho $F = (P, Q, R)$ là trường theo ba biến (x, y, z) trên $\mathbb{R}^3$.

Khi đó, hàm $\operatorname{div} F$ được gọi là hàm phân tán (divergence) của trường F và được tính bằng:

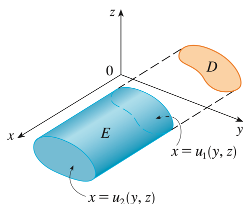
$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

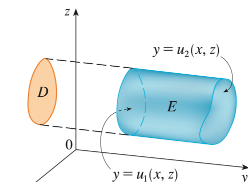
Ta thấy hàm phân tán của trường vectơ F là một hàm số thực.

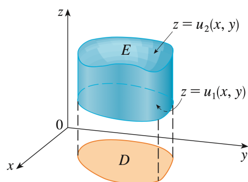
Ví dụ: Cho trường $F(x, y, z) = (2x + e^y z, x^2 y, yz)$. Như vậy, hàm phân tán của F là:

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x}(2x + e^y z) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 y) + \frac{\partial}{\partial z}(yz) = 2 + x^2 + y.$$

Nhắc lại: Khối đơn giản trong không gian $\mathbb{R}^3$







Khối đơn giản theo cả ba chiều còn được gọi là khối đơn giản với biên trơn từng mảnh.

Điều này nghĩa là theo mỗi chiều thì khối là miền nằm giữa hai đồ thị. Ví dụ, khối E là đơn giản theo chiều trục z, tức là:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2, \\ u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\},$$

với D đóng, bị chặn, và có diện tích.

Giả sử rằng trên ∂D thì $u_1 = u_2$ hoặc $u_1 < u_2$; và các hàm u_1, u_2 là trơn trên ∂E.

Ta giả sử các mặt bao quanh khối E có định hướng ra ngoài, và biên ∂D là vết của một đường đi chính quy, từng khúc.

Công thức Gauss–Ostrogradsky (Divergence Theorem)

Cho trường F trơn trên một tập mở chứa một khối đơn giản E với biên trơn từng mảnh được định hướng ra ngoài. Khi đó,

$$\iint_{\partial E} F \cdot n \,\mathrm{d}S = \iint_{\partial E} F \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_E \operatorname{div} F \,\mathrm{d}V.$$

<u>Ghi chú</u>:

- Đây là tổng quát hoá của dạng thông lượng của công thức Green.
- Công thức Gauss–Ostrogradsky cho một liên hệ giữa tích phân trên miền với tích phân trên biên của miền.

  Như thế nó có cùng dạng như các công thức Newton–Leibniz, Green, Stokes, nhưng cho trường hợp miền ba chiều.

Ví dụ

Tính thông lượng của trường $F(x, y, z) = (2x + e^y z, x^2 y, yz)$ *qua mặt cầu đơn vị* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *định hướng ra ngoài.*

Ta *thử* tính trực tiếp $\iint_S F \cdot \mathrm{d}\vec{S}$, trong đó S là mặt cầu đơn vị.

Mặt cầu S được tham số hóa bởi

$$S(\phi, \theta) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi),$$

trong đó $0 \leq \phi \leq \pi$ và $0 \leq \theta \leq 2\pi$ và mặt được định hướng ra ngoài. Ta cũng có:

$$\begin{aligned} S_\phi &= (\cos\phi\cos\theta, \cos\phi\sin\theta, -\sin\phi), \\ S_\theta &= (-\sin\phi\sin\theta, \sin\phi\cos\theta, 0), \\ S_\phi \times S_\theta &= (\sin^2\phi\cos\theta, \sin^2\phi\sin\theta, \sin\phi\cos\phi). \end{aligned}$$

Thông lương của trường F qua mặt cầu đơn vị là:

$$
\begin{aligned}
&\iint_S F \cdot \,\mathrm{d}\vec{S} \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \Big(2\sin\phi\cos\theta + e^{\sin\phi\sin\theta}\cos\phi, \sin^3\phi\cos^2\theta\sin\theta, \sin\phi\cos\phi\sin\theta\Big) \\
&\qquad\qquad \cdot (\sin^2\phi\cos\theta, \sin^2\phi\sin\theta, \sin\phi\cos\phi)\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \Big(2\sin^3\phi\cos^2\theta + e^{\sin\phi\sin\theta}\sin^2\phi\cos\theta + \sin^5\phi\sin^2\theta\cos^2\theta \\
&\qquad\qquad + \sin^2\phi\cos^2\phi\sin\theta\Big)\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}
$$

Quá phức tạp . . .

Sử dụng công thức Gauss–Ostrogradsky, gọi E là khối cầu đơn vị, và thông lượng của trường F qua mặt cầu là:

$$\begin{aligned}
\iint_S F \cdot \mathrm{d}\vec{S} &= \iiint_E \operatorname{div} F \,\mathrm{d}V \\
&= \iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 1} \left[\frac{\partial}{\partial x}(2x + e^y z) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 y) + \frac{\partial}{\partial z}(yz)\right] \mathrm{d}V \\
&= \iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 1} \left[2 + x^2 + y\right] \mathrm{d}V.
\end{aligned}$$

Sử dụng tọa độ cầu, ta thu được kết quả:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(2 + \rho^2 \sin^2\phi \cos^2\theta + \rho \sin\phi \sin\theta\right) \rho^2 \sin\phi \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}\rho \\
&= \frac{8\pi}{3} + \frac{4\pi}{15} + 0 \\
&= \frac{44\pi}{15}.
\end{aligned}$$



Chứng minh Công thức Gauss–Ostrogradsky

Ta viết $F = (P, Q, R)$ và xem E như khối đơn giản theo chiều trục z:

$$E = \{(x, y, z) \,|\, (x, y) \in D,\ f(x, y) \leq z \leq g(x, y)\},$$

trong đó f và g là hàm trơn xác định trên miền phẳng D. Ta sẽ chứng minh

$$\iint_{\partial E} R\vec{\mathrm{k}} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{E} \frac{\partial R}{\partial z} \,\mathrm{d}V.$$

Ta chứng minh tương tự hai biểu thức tương ứng cho hai chiều còn lại, rồi cộng lại để được đẳng thức cần chứng minh.

Nếu $f < g$ trên ∂D thì ∂E có mặt hông. Trên mặt hông U này, tích phân

$$\iint_{U} R\vec{\mathrm{k}} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

vì pháp tuyến của mặt hông nằm ngang nên vuông góc với trường $R\vec{\mathrm{k}}$ *(chi tiết xem trong giáo trình).*

Như vậy, tích phân của $R\vec{\mathrm{k}}$ trên ∂E bằng tổng tích phân của $R\vec{\mathrm{k}}$ trên mặt trên và mặt dưới của khối E, là các mặt đồ thị, và bằng:

$$\begin{aligned}\iint_D R(x,y,g(x,y))\vec{\mathrm{k}}\cdot(-g_x,-g_y,1)\,\mathrm{d}A \\ +\iint_D R(x,y,f(x,y))\vec{\mathrm{k}}\cdot(f_x,f_y,-1)\,\mathrm{d}A \\ =\iint_D [R(x,y,g(x,y))-R(x,y,f(x,y))]\,\mathrm{d}A.\end{aligned}$$

Mặt khác, theo công thức Fubini, tích phân trên miền E là:

$$\begin{aligned}\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}V &= \iint_D\left(\int_{f(x,y)}^{g(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}A\\ &= \iint_D (R(x,y,g(x,y))-R(x,y,f(x,y)))\,\mathrm{d}A.\end{aligned}$$

Như vậy, ta đã chứng minh $\iint_{\partial E} R\vec{\mathrm{k}} \cdot \,\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}V$.

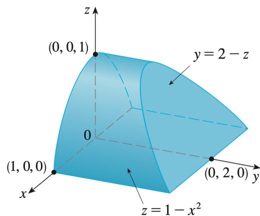
Chứng minh tương tự, ta có các đẳng thức:

$$\iint_{\partial E} P\vec{\mathrm{i}} \cdot \,\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_E \frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}V,$$
$$\iint_{\partial E} Q\vec{\mathrm{j}} \cdot \,\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y}\,\mathrm{d}V.$$

Cộng lại để có điều phải chứng minh. 

Ví dụ

Tính tích phân $\iint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$, *trong đó* $\vec{F}(x,y,z) = \left(xy, y^2 + e^{xz^2}, \sin(xy)\right)$ *và* S *là bề mặt của vùng* E *bị chặn bởi khối trụ parabolic* $z = 1 - x^2$ *và những mặt phẳng* $z = 0$, $y = 0$, $y + z = 2$. *Mặt* S *được định hướng ra ngoài khối* E.



Miền E được miêu tả là miền đơn giản theo chiều trục y:

$$E = \{(x,y,z) \mid 0 \le y \le 2 - z,\ 0 \le z \le 1 - x^2, \\ -1 \le x \le 1\}.$$

Ta cũng tính:

$$\operatorname{div} F(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + e^{xz^2}) + \frac{\partial}{\partial z}(\sin(xy)) = y + 2y + 0 = 3y.$$

Áp dụng Định lý Gauss–Ostrogradsky, ta được:

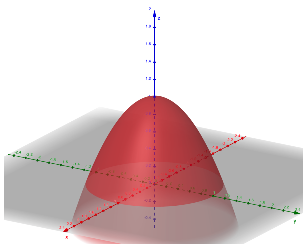
$$\begin{aligned}
\iint_S F \cdot \, \mathrm{d}\vec{S} &= \iiint_E \operatorname{div} F \, \mathrm{d}V \\
&= \iiint_E 3y \, \mathrm{d}V \\
&= 3 \int_{-1}^{1} \int_{0}^{1-x^2} \int_{0}^{2-z} y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x \\
&= 3 \int_{-1}^{1} \int_{0}^{1-x^2} \frac{(2-z)^2}{2} \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{2} \int_{-1}^{1} -\frac{(2-z)^3}{3} \Bigg|_{z=0}^{z=1-x^2} \, \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} [(x^2+1)^3 - 8] \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{184}{35}.
\end{aligned}$$



Ví dụ

Tính thông lượng của trường $\vec{F}(x,y,z) = (x, y, 2-2z)$ *qua mặt* S *cho bởi* $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$, *định hướng lên trên bằng hai cách: (a) tính trực tiếp, và (b) tính thông lượng của* $\vec{F}$ *qua một mặt khác và dùng định lý Gauss–Ostrogradsky.*

Ta cần tính tích phân $\iint_S \vec{F}(x,y,z) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$.



(a) Tính trực tiếp: Hình chiếu của mặt S trên mặt phẳng xy thỏa $1 - x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$, một hình tròn đơn vị tâm O trong mặt xy. Mặt S được tham số hóa bởi:

$$S(x,y) = (x, y, 1 - x^2 - y^2), \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Phương trình tham số này có

$$S_x = (1, 0, -2x), \quad S_y = (0, 1, -2y), \quad S_x \times S_y = (2x, 2y, 1),$$

và mặt S có định hướng lên trên. Vì vậy, ta có:

$$\begin{aligned}\iint_S F \cdot \mathrm{d}\vec{S} &= \iint_{x^2+y^2 \le 1} (x, y, 2 - 2 + 2x^2 + 2y^2) \cdot (2x, 2y, 1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_{x^2+y^2 \le 1} (4x^2 + 4y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 4r^2 \cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi.\end{aligned}$$

(b) Sử dụng Gauss–Ostrogradsky: Gọi S_1 là mặt cho bởi $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 0$, định hướng xuống dưới.

Hội của mặt S và mặt S_1 tạo thành mặt kín bao khối E với vectơ pháp tuyến hướng ra ngoài.

Áp dụng công thức Gauss–Ostrogradsky, ta có:

$$\begin{aligned}
\iint_S F \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint_{S_1} F \cdot \mathrm{d}\vec{S} &= \iint_{\partial E} F \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
&= \iiint_E \operatorname{div} F \, \mathrm{d}V \\
&= \iiint_E 0 \, \mathrm{d}V = 0.
\end{aligned}$$

Như vậy, ta có:

$$\begin{aligned}\iint_S F\cdot\,\mathrm{d}\vec{S} &= -\iint_{S_1} F\cdot\,\mathrm{d}\vec{S}\\ &= -\iint_{S_1} F\cdot n\,\mathrm{d}S\\ &= -\iint_{x^2+y^2\le 1}(x,y,2)\cdot(0,0,-1)\,\mathrm{d}A\\ &= -\iint_{x^2+y^2\le 1} -2\,\mathrm{d}A\\ &= 2\pi,\end{aligned}$$

trong đó tích phân cuối cùng được tính dựa trên diện tích của đĩa tròn đơn vị. □

Ví dụ: diện tích mặt cầu và thể tích quả cầu

Cho trường $F(x, y, z) = (x, y, z)$ và gọi $B'(O, R)$ là khối cầu tâm O, bán kính R.

Trường F là đặc biệt, giúp ta nghiên cứu sự liên hệ giữa diện tích mặt cầu và thể tích quả cầu.

Vectơ pháp tuyến đơn vị ngoài của mặt cầu $S(O, R) = \partial B'(O, R)$ là vectơ đơn vị theo hướng từ tâm đến các điểm (x, y, z) trên mặt cầu, nghĩa là:

$$n = \frac{1}{R}(x, y, z).$$

Công thức Gauss–Ostrogradsky cho:

$$\begin{aligned}\iiint_{B'(O,R)} \operatorname{div}(x,y,z)\,\mathrm{d}V &= \iint_{S(O,R)} (x,y,z)\cdot\frac{1}{R}(x,y,z)\,\mathrm{d}S\\ \Leftrightarrow\ \iiint_{B'(O,R)} 3\,\mathrm{d}V &= \frac{1}{R}\iint_{S(O,R)} (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S\\ \Leftrightarrow\ 3|B'(O,R)| &= \frac{1}{R}\iint_{S(O,R)} R^2\,\mathrm{d}S\\ \Leftrightarrow\ 3|B'(O,R)| &= R|S(O,R)|.\end{aligned}$$

Như vậy, diện tích mặt cầu có thể được tính từ thể tích quả cầu:

$$|S(O,R)| = \frac{3}{R}|B'(O,R)| = \frac{3}{R}\cdot\frac{4\pi R^3}{3} = 4\pi R^2.$$



Bằng cách tính trực tiếp như mệnh đề ‘$\operatorname{curl}\operatorname{grad} = 0$’, ta có thể chứng minh được mệnh đề sau:

Mệnh đề ($\operatorname{div}\operatorname{curl} = 0$)

Nếu F là trường có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trên một tập mở thì trên đó $\operatorname{div}(\operatorname{curl} F) = 0$.

Viết bằng kí hiệu hình thức: $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$.

Kết quả này cho một điều kiện cần để một trường là trường curl của một trường khác.

<u>Ghi chú</u>: Với $\vec{J}$ cho trước, giả sử tồn tại một trường vectơ $\vec{F}$ sao cho $\operatorname{curl} F = \vec{J}$. Khi đó, cũng tồn tại một trường vô hướng $G(x, y, z)$ sao cho $\operatorname{curl}(F + \nabla G) = \vec{J}$ (vì $\operatorname{curl}\operatorname{grad} G = 0$), nghĩa là sự tồn tại của $\vec{F}$ không phải duy nhất. Ta nói các nghiệm này sai khác nhau một trường vô hướng.

Ví dụ

Tìm một trường vectơ $\vec{F}$ khả vi liên tục đến cấp hai biết rằng

$$\operatorname{curl} F = (x, y, z).$$

Nếu trường $\vec{F}$ không tồn tại, chứng minh.

Giả sử trường $\vec{F}$ tồn tại với $\operatorname{curl} F = (x, y, z)$. Khi đó, $\operatorname{div} \operatorname{curl} F = 0$, nhưng tính trực tiếp cho

$$\operatorname{div} \operatorname{curl} F = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3 \neq 0.$$

Điều này mâu thuẫn, nên trường $\vec{F}$ như trên không tồn tại. 

Ý nghĩa vật lý của hàm phân tán div

Bổ đề

Cho f là một hàm thực khả tích trên một lân cận của điểm $p \in \mathbb{R}^n$ và liên tục tại p. Gọi $B'(p,r)$ là quả cầu đóng tâm tại p với bán kính r. Khi đó,

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B'(p,r)|} \int_{B'(p,r)} f = f(p).$$

Vậy giá trị trung bình của một hàm liên tục quanh một điểm tiến về giới hạn là giá trị của hàm tại điểm đó.

Chứng minh

Cho $\epsilon > 0$. Vì f liên tục tại p nên với r đủ nhỏ thì

$$|f(q) - f(p)| \leq \epsilon \quad \forall q \in B'(p, r).$$

Từ đó, ta có:

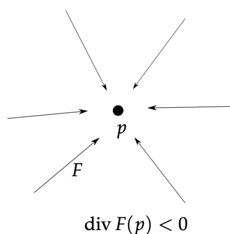
$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{1}{|B'(p,r)|} \int_{B'(p,r)} f \right) - f(p) \right| &= \left| \frac{1}{|B'(p,r)|} \int_{B'(p,r)} [f(q) - f(p)] \, \mathrm{d}q \right| \\ &\leq \frac{1}{|B'(p,r)|} \int_{B'(p,r)} |f(q) - f(p)| \, \mathrm{d}q \\ &\leq \frac{1}{|B'(p,r)|} \int_{B'(p,r)} \epsilon \, \mathrm{d}q \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

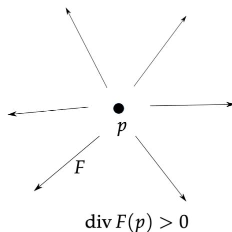
Lấy giới hạn khi $\epsilon \to 0$, ta thu được điều cần chứng minh. 

Áp dụng bổ đề trên cho hàm $\operatorname{div} F$, định lý Gauss–Ostrogradsky cho ta:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F(p) &= \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B'(p,r)|} \iiint_{B'(p,r)} \operatorname{div} F \, \mathrm{d}V \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B'(p,r)|} \iint_{\partial B'(p,r)} F \cdot n \, \mathrm{d}S. \end{aligned} \tag{1}$$

Tích phân $\iint_{\partial B'(p,r)} F \cdot n \, \mathrm{d}S$ là thông lượng của trường F ra khỏi mặt cầu $\partial B'(p,r)$. Như vậy, $\operatorname{div} F(p)$ chỉ độ phân tán của trường F trên đơn vị thể tích quanh p.





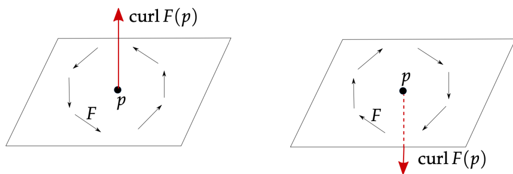
Ý nghĩa vật lý của hàm xoay $\operatorname{curl} F$

Xét một điểm p. Lấy một mặt phẳng qua p với phương định bởi pháp tuyến n. Xét hình tròn $B'(p,r)$ trên mặt phẳng này với tâm tại p và bán kính r.

Áp dụng bổ đề trên cho hàm $\operatorname{curl} F(p) \cdot n$:

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} F(p) \cdot n &= \lim_{r \to 0} \frac{1}{|B'(p,r)|} \iint_{B'(p,r)} \operatorname{curl} F \cdot n \, \mathrm{d}A \\ &= \lim_{r \to 0} \frac{1}{|B'(p,r)|} \int_{\partial B'(p,r)} F \cdot \mathrm{d}\vec{s}. \end{aligned} \tag{2}$$

Vậy $\operatorname{curl} F(p) \cdot n$ thể hiện lưu lượng ngược chiều kim đồng hồ (độ xoay) của trường F trên phần tử diện tích quanh p trong mặt phẳng qua p vuông góc n.



Ta có $\operatorname{curl} F(p) \cdot n$ đạt giá trị lớn nhất khi n cùng phương cùng chiều với $\operatorname{curl} F(p)$.

Vậy $\operatorname{curl} F(p)$ cho phương của mặt phẳng mà trên đó độ xoay của trường quanh p là lớn nhất, chiều của nó được xác định bởi chiều xoay của trường theo quy tắc bàn tay phải.

Hơn nữa, có thể chứng tỏ là độ lớn của $\operatorname{curl} F(p)$ tỉ lệ với tốc độ xoay theo góc của trường quanh p. Hay nói cách khác, $\operatorname{curl} F(p)$ chỉ sự xoay của trường F tại điểm p.

Tích phân $\iint_S \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S}$ còn được gọi là lưu lượng (circulation) của trường F trên mặt S.

Ghi chú

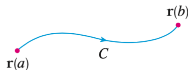
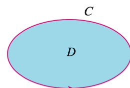
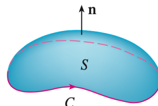
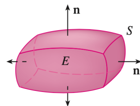
Công thức cho div (1) và cho curl (2) cho thấy chúng là những đại lượng vật lý, không phụ thuộc hệ tọa độ.

Từ đây ta có giải thích: *Công thức Stokes nói rằng tổng lưu lượng trên mặt bằng tổng lưu lượng trên biên của mặt, còn Công thức Gauss–Ostrogradsky nói rằng tổng độ phát tán trong khối bằng tổng thông lượng ra biên của khối.*

- Tất cả các kết quả như
  - Định lý cơ bản của Vi tích phân cho tích phân đường,
  - Công thức Green,
  - Công thức Stokes, và
  - Công thức Gauss–Ostrogradsky (định lý Divergence)

đều là “phiên bản” của Định lý cơ bản của Vi tích phân trong không gian đa chiều.

- Với mỗi trường hợp, vế trái là tích phân của “một dạng đạo hàm”, còn vế phải là “giá trị” của hàm trên biên.

Định lý cơ bản VTP	$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$	
Định lý cơ bản VTP (đường)	$\int_C \nabla f \cdot \mathrm{d}\vec{s} = f(r(b)) - f(r(a))$	
Công thức Green	$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}A = \int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$	
Công thức Stokes	$\iint_S \mathrm{curl}\ F\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_C F \cdot \mathrm{d}\vec{s}$	
Công thức Gauss–Ostrogradsky	$\iiint_E \mathrm{div}\ F\,\mathrm{d}V = \iint_S F \cdot \mathrm{d}\vec{S}$	

Ứng dụng của giải tích vectơ: Định luật Gauss

Gọi E là điện trường gây bởi điện tích q tại điểm O. Theo định luật Coulomb, điện trường gây bởi điện tích q này tại một điểm bất kì trong không gian có vị trí cho bởi vectơ $\vec{r} = (x, y, z)$ đi từ điểm mang điện tích q tới điểm đang xét là:

$$E(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}.$$

Ta thấy vì

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) = \frac{-2x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) = \frac{x^2-2y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) = \frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},$$

nên $\operatorname{div} E = 0$ trên $\mathbb{R}^3 \setminus \mathrm{O}$.

Lấy quả cầu $B(O,R)$ định hướng ra ngoài, ta tính trực tiếp:

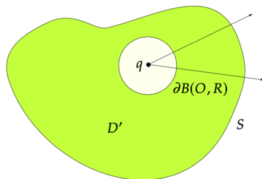
$$\begin{aligned}
&\iint_{\partial B(O,R)} E \cdot \, \mathrm{d}\vec{S} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{(R\sin(\phi)\cos(\theta), R\sin(\phi)\sin(\theta), R\cos(\phi))}{R^3} \\
&\qquad \cdot R^2 \sin(\phi)(\sin(\phi)\cos(\theta), \sin(\phi)\sin(\theta), \cos(\phi)) \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(\phi) \left[\sin^2(\phi)\cos^2(\theta) + \sin^2(\phi)\sin^2(\theta) + \cos^2(\phi)\right] \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(\phi) \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{q}{\epsilon_0}.
\end{aligned}$$

Giả sử S là một mặt kín bao quanh khối D, nghĩa là $S = \partial D$.

Nếu D không chứa điểm O, và giả sử công thức Gauss–Ostrogradsky có thể áp dụng được cho D thì

$$\iint_S E \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_D \operatorname{div} E \, \mathrm{d}V = 0.$$

Nếu D chứa điểm O ở phần trong, thì lấy một quả cầu $B(O, R)$ với R đủ nhỏ sao cho nó không cắt S, và cho biên $\partial B(O, R)$ định hướng ra ngoài $B(O, R)$.



Khi đó S cùng $\partial B(O, R)$ tạo thành biên của một khối D' không chứa O.

Áp dụng công thức Gauss–Ostrogradsky để có:

$$\iint_S E \cdot \mathrm{d}\vec{S} - \iint_{\partial B(O,R)} E \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{D'} \operatorname{div} E \, \mathrm{d}V = 0,$$

nên ta tính được

$$\iint_S E \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{\partial B(O,R)} E \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Điều này có nghĩa là: thông lượng của điện trường qua một mặt kín không phụ thuộc vào mặt và tỉ lệ với điện tích được bao bởi mặt.

Đây là nội dung của định luật Gauss, được rút ra từ định luật Coulomb thuần túy bằng toán học, có thể được gọi là dạng tích phân của định luật Coulomb. □

Trong thập niên 1820, Ampère phát hiện rằng một dòng điện tạo ra quanh nó một từ trường. Năm 1831 Faraday phát hiện rằng một từ trường thay đổi theo thời gian lại tạo ra một điện trường.

Năm 1864, Maxwell thống nhất điện trường với từ trường, thuần túy bằng toán học:

Các phương trình Maxwell

Dạng vi phân	Dạng tích phân
(1) (Coulomb) $\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, với ρ là hàm mật độ điện tích	(Gauss) $\iint_S E \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$, với S là một mặt kín, Q là tổng điện tích bao bởi S
(2) $\operatorname{curl} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$, với B là từ trường	(Faraday) $\int_{\partial S} E \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_S B \cdot \mathrm{d}\vec{S}$
(3) $\operatorname{div} B = 0$	$\iint_S B \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$
(4) (Ampère) $\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \operatorname{curl} B = \frac{J}{\epsilon_0} + \frac{\partial E}{\partial t}$, với J là mật độ dòng điện, μ_0 là một hằng số	$\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \int_{\partial S} B \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_S E \cdot \mathrm{d}\vec{S}$, với I là cường độ dòng điện qua mặt S

Định luật Gauss có tính vĩ mô, trong khi định luật Coulomb có tính vi mô. Định luật Gauss có thể được kiểm chứng bằng thí nghiệm dễ hơn định luật Coulomb.

Ta sẽ chứng tỏ định luật Gauss dẫn tới định luật Coulomb.

Xét một điểm p bất kỳ và quả cầu đóng $B'(p, r)$.

Nếu ρ là hàm mật độ điện tích và Q là tổng điện tích, định luật Gauss và công thức Gauss–Ostrogradsky cho ta:

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{B'(p,r)} \rho \, \mathrm{d}V = \iint_{\partial B'(p,r)} E \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{B'(p,r)} \operatorname{div} E \, \mathrm{d}V.$$

Chia hai vế cho $|B'(p,r)|$ và lấy giới hạn $r \to 0$ để được:

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\epsilon_0 |B'(p,r)|} \iiint_{B'(p,r)} \rho \, \mathrm{d}V = \lim_{r\to 0} \frac{1}{B'(p,r)} \iiint_{B'(p,r)} \operatorname{div} E \, \mathrm{d}V.$$

Áp dụng mệnh đề về giá trị trung bình, ta có kết quả của định luật Coulomb:

$$\frac{\rho(p)}{\epsilon_0} = \operatorname{div} E(p).$$

Ngược lại, bằng cách áp dụng công thức Guass–Ostrogradsky, định luật Gauss có thể nhận được từ định luật Coulomb:

$$\iint_{\partial D} E \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_D \operatorname{div} E \, \mathrm{d}V = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_D \rho \, \mathrm{d}V = \frac{Q}{\epsilon_0}. \qquad \square$$

Giới thiệu Công thức Green

Giả sử giả thiết công thức Gauss–Ostrogradsky có thể áp dụng được và gọi n là vectơ pháp tuyến đơn vị ngoài. Ta có các công thức sau:

(a) $\iint_{\partial E} \nabla f \cdot n \, \mathrm{d}S = \iiint_E \Delta f \, \mathrm{d}V$.

(b) $\iint_{\partial E} (f \nabla g) \cdot n \, \mathrm{d}S = \iiint_E (f \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) \, \mathrm{d}V$.

(c) $\iint_{\partial E} (f \nabla g - g \nabla f) \cdot n \, \mathrm{d}S = \iiint_E (f \Delta g - g \Delta f) \, \mathrm{d}V$.

(d) $\iint_{\partial E} f n_i \, \mathrm{d}S = \iiint_E \frac{\partial f}{\partial x_i} \, \mathrm{d}V$, với n_i là tọa độ thứ i của vectơ n.

(e) $\iint_{\partial E} f g n_i \, \mathrm{d}S = \iiint_E \frac{\partial f}{\partial x_i} g \, \mathrm{d}V + \iiint_E f \frac{\partial g}{\partial x_i} \, \mathrm{d}V$.

Ở đây, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ là toán tử Laplace.

Hết chương trình lớp Giải tích 3A.